



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1781

De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analisi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur" (1781). *Euler Archive - All Works*. 515.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/515>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
CASIBVS QVIBVSDAM
MAXIME MEMORABILIBVS IN
ANALYSI INDETERMINATA;
VBI IMPRIMIS INSIGNIS VSVS CALCVLII ANGV-
LORVM IN ANALYSI DIOPHANTAEA
OSTENDITVR.

Auctore
L. EULERO.

§. 1.

Quaestionum, quas hic sum tractaturus, iam olim men-
tionem feci, in Dissertatione, Tomo VI. Nouor. Comm.
inserta sub titulo: *De Problematibus indeterminatis, quae
videntur plusquam determinata;* vbi ostendi, quomodo vni-
ca aequatione, inter quantitates indeterminatas constituta,
plurima Problemata Diophantaea facili calculo simul resolui
queant; id quod vtrique maxime Paradoxon videbatur,
cum vulgo numerus conditionum propositarum numerum
quantitatum incognitarum superare non soleat. Quam ob
causam argumentum ibi tractatum vtrique in Analyfi ma-
ximi momenti est censendum. Tum temporis autem in
eiusmodi aequationibus subsistere fui coactus, in quibus
quantitates indeterminatae non vltra secundam dimensio-
nem ascendant. Nunc autem tales aequationes sum con-
templaturus, vbi indeterminatae adeo ad quartam dimen-

tionem affurgunt, quarum resolutio fines Analyseos transcendere videatur, quandoquidem hic tantum de solutionibus per numeros rationales agitur.

§. 2. Prima igitur aequatio quarti gradus, quam hic tractabo, hoc Problemate continetur.

Problema I.

Inuenire quatuor numeros rationales x, y, z, v , ut huic aequationi satisfiat:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2yyzz \\ + 2xxvv + 2yyvv + 2zzvv + v^4 \end{aligned} \right\} = 0$$

cuius formulae, satis prolixae, loco hic breuitatis gratia in sequentibus scribam litteram V.

§. 3. Pro his autem litteris x, y, z, v , inuentis idoneis valoribus, simul sequentes septem formulae sponte euadent numeri quadrati, quae sunt:

I. $xxyy - zzvv = \frac{1}{4}(xx + yy - zz + vv)^2$

II. $xxzz - yyvv = \frac{1}{4}(xx + zz - yy + vv)^2$

III. $yyzz - xxvv = \frac{1}{4}(yy + zz - xx + vv)^2$

IV. $xxyy - vv(xx + yy) = \frac{1}{4}(xx + yy - zz - vv)^2$

V. $xxzz - vv(xx + zz) = \frac{1}{4}(xx + zz - yy - vv)^2$

VI. $yyzz - vv(yy + zz) = \frac{1}{4}(yy + zz - xx - vv)^2$

VII. $xxyy + xxzz + yyzz = \frac{1}{4}(xx + yy + zz + vv)^2$.

Ratio per se est manifesta, cum quarta pars formulae nostrae V, cuius valor per hypothesin $= 0$, singulis his septem formulis addita, producat reuera quadrata, quorum radices hic assignauimus.

§. 4. Quodsi autem duae tantum huiusmodi formulae, vel adeo tres proponantur, quae quadrata reddi debeant, per praecepta communia methodi Diophanteae negotium difficillime confici poterit, etiamsi quis maxime prolixos calculos expediuerit; unde intelligitur, si quatuor pluresue tales formulae ad quadrata reducendae proponantur, solutionem ne tentari quidem posse. Tanto magis igitur erit mirandum, quando omnium harum septem formarum reductionem ad quadrata vnico quasi labore assignabimus.

Solutio Problematis propositi.

§. 5. Totam autem solutionem ex duabus tantum prioribus formulis deduci posse obseruauimus, quemadmodum ex sequente Analyfi intelligitur. Facile autem apparet, primam formulam $xxyy - zzvv$ quadratum reddi, si sumatur $xy = zv \frac{(pp+rr)}{2pr}$; tum enim huius formulae radix erit $= \frac{zv(pp+rr)}{2pr}$, quae igitur aequalis erit quantitati $\frac{1}{2}(xx + yy - zz + vv)$. Simili modo secunda formula euadit quadratum, si sumatur

$$xz = \frac{yv(qq+ss)}{2qs};$$

tum enim eius radix erit

$$\frac{yv(qq+ss)}{2qs} = \frac{1}{2}(xx + zz - yy + vv),$$

ex quibus conditionibus iam liquet, omnes quatuor quantitates x, y, z, v , determinari posse, ita ut non opus sit ad reliquas formulas respicere.

§. 6. Cum igitur sit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp+rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq+ss}{2qs},$$

prior

prior per posteriorem multiplicata dabit hanc aequationem:

$$\frac{x x}{v v} = \frac{(p p + r r)(q q + s s)}{4 p r p s}.$$

Prior autem per posteriorem diuisa dat

$$\frac{y y}{z z} = \frac{q s (p p + r r)}{p r (q q + s s)};$$

unde patet, istam solutionem absolui non posse, nisi pro literis p, r, q, s , tales numeri exhiberi queant, ut ista formula: $\frac{(p p + r r)(q q + s s)}{4 p r p s}$ euadat quadratum. Hoc autem praestito quoque altera expressio, pro $\frac{y y}{z z}$ inuenta, fiet quadratum. Infra autem fusius ostendemus, quomodo tales numeri p, r, q, s , quocunque libuerit, inuestigari queant.

§. 7. Hic igitur assumemus tales numeros nobis iam esse cognitos, indeque reperiri

$$\frac{x x}{v v} = \frac{a a}{b b} \text{ et } \frac{y y}{z z} = \frac{c c}{d d};$$

inde ergo statuatur

$$x = a t; v = b t; y = c u \text{ et } z = d u,$$

et iam has duas literas t et u ex radicibus ante exhibitis sequenti modo facile eruere licebit. His enim valoribus substitutis prior radix praebebit

$$\frac{b d t u (p p - r r)}{p r} = (a a + b b) t t + (c c - d d) u u.$$

Simili modo ex altera radice nanciscimur

$$\frac{b c t u (q q - s s)}{q s} = (a a + b b) t t - (c c - d d) u u.$$

Sufficeret autem vnica harum duarum aequationum, quandoquidem per extractionem radicis quadratae ambae quantitates t et u , atque adeo duplici modo definiri possent, nisi forte ad irrationalia delaberemur. Hoc autem fieri non posse ex sequenti Analyfi patefcet.

Formu-

§. 8. Statuamus hic breu. gr.

$$\frac{p p - r r}{2 p r} = m \text{ et } \frac{q q - s s}{2 q s} = n,$$

vbi notetur, pro radicibus quadratis etiam sumi potuisse

$$\frac{r r - p p}{2 p r} \text{ et } \frac{s s - q q}{2 q s};$$

unde patet, ambas literas m et n tam positue quam negative accipi posse. Hoc modo habebimus has aequationes:

$$2 m b d t u = (a a + b b) t t + (c c - d d) u u$$

$$2 n b c t u = (a a + b b) t t - (c c - d d) u u;$$

quae duae aequationes, additae, dabunt hanc:

$$b (m d + n c) t u = (a a + b b) t t,$$

quae praebet

$$\frac{t}{u} = \frac{b (m d + n c)}{a a + b b}.$$

Eodem modo, si posterior a priore subtrahatur, prodibit ista aequalitas:

$$b (m d - n c) t u = (c c - d d) u u,$$

unde iterum deducitur

$$\frac{t}{u} = \frac{c c - d d}{b (m d - n c)}.$$

qui duo valores certe inter se consuenire debent. Vt-
mur igitur posteriore forma, et quia literas m et n pro
lubitu siue positue siue negative accipere licet, statuamus

$$t = c c - d d \text{ et } u = b (m d \pm n c);$$

vbi iam duplex solutio inuoluitur.

§. 9. Substituamus igitur hos valores, atque om-
nes nostrae quatuor quantitates incognitae x, y, z, v ,
sequenti modo prodibunt determinatae:

$$x = a(cc - dd); v = b(cc - dd)$$

$$y = bc(md \pm nc); z = bd(md \pm nc),$$

vbi vel signa superiora vel inferiora vbique capi debebunt. Atque nunc certo asseuerare possumus, his valoribus literarum x, y, z, v , omnes septem formulas supra memoratas quadrata reddi, quamuis tantum duas priores hic in computum duxerimus.

§. 10. Ante autem quam methodum sumus tradituri, numeros idoneos pro literis p, r, q, s inuestigandi, conueniet hanc solutionem per aliquot exempla illustrare, in quo negotio quidem necesse erit, ex iis, quae deinceps tradentur, valores idoneos pro literis p, r, q, s , depromere.

Exemplum I.

$$\text{vbi } p = 5, r = 1, q = 8, s = 1.$$

§. 11. Ex his igitur valoribus habebimus statim

$$\frac{x}{y} = \frac{13}{5} \text{ et } \frac{x}{z} = \frac{65}{16};$$

hinc iam sequitur, fore

$$\frac{x}{v} = \frac{13^2}{4^2} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{4^2}{5^2};$$

quamobrem statuamus

$$x = 13t; v = 4t; y = 4u; z = 5u,$$

ita vt fit

$$a = 13; b = 4; c = 4; d = 5.$$

Iam porro quia est

$$m = \frac{12}{5} \text{ et } n = \frac{63}{16},$$

ex his iam valoribus namiscemur

$$x = 39; v = 12; y = 16 \left(4 \pm \frac{11}{4}\right); z = 20 \left(4 \pm \frac{11}{4}\right).$$

Proui igitur vel superiora signa vel inferiora valent, obtinebimus duas sequentes solutiones ad minimos terminos reductas, si forte habuerint inter se comunem factorem:

$$\text{I. } x = 39; v = 12; y = 20; z = 25.$$

$$\text{II. } x = 39; v = 12; y = 148; z = 185.$$

quarum solutionum prior sine dubio simplices satis numeros Problemati satisfaciennes suppeditat.

§. 12. Videamus, quomodo prior Solutio omnibus septem formulis supra allatis satisfaciat

$$\text{I. } \sqrt{xxyy - zzvv} = \frac{1}{2}(xx + yy - zz + vv) = 720.$$

$$\text{II. } \sqrt{xxzz - yyvv} = \frac{1}{2}(xx + zz - yy + vv) = 945.$$

$$\text{III. } \sqrt{yyzz - xxvv} = \frac{1}{2}(yy + zz - xx + vv) = 176.$$

$$\text{IV. } \sqrt{xxyy - vv(xx + yy)} = \frac{1}{2}(xx + yy - zz - vv) = 576.$$

$$\text{V. } \sqrt{xxzz - vv(xx + zz)} = \frac{1}{2}(xx + zz - yy - vv) = 801.$$

$$\text{VI. } \sqrt{yyzz - vv(yy + zz)} = \frac{1}{2}(yy + zz - xx - vv) = 320.$$

$$\text{VII. } \sqrt{xxyy + xxzz + yyzz} = \frac{1}{2}(xx + yy + zz + vv) = 1345.$$

Exemplum II.

$$\text{quo } p = 5, r = 1, q = 13, s = 9.$$

§. 13. Hic igitur erit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{3} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{125}{137}, \text{ hinc } \frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{3^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{25^2}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{5}{3} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{39}{25}.$$

M 2

Fiat

Fiat ergo

$$x = 5t; v = 3t; y = 39u; z = 25u,$$

ita ut fit

$$a = 5; b = 3; c = 39; d = 25.$$

Porro autem erit

$$m = \frac{12}{5} \text{ et } n = \frac{44}{117}, \text{ ex quibus valoribus fiet}$$

$$x = 5.896; v = 3.896;$$

$$y = 3.39.60 \pm 39.44; z = 3.25.60 \pm 25.44.$$

Hinc ergo sequentes duae solutiones deducuntur:

$$\text{I. } x = 112; v = 672; y = 39; z = 25.$$

$$\text{II. } x = 112; v = 672; y = 39.89; z = 25.89.$$

Exemplum III.

$$\text{quo } p = 8, r = 1; q = 13; s = 9.$$

§. 14. Hoc casu erit

$$\frac{x}{z} = \frac{63}{18} \text{ et } \frac{x}{y} = \frac{125}{117}, \text{ hincque}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{25}{12} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{39}{25}.$$

Sumto igitur

$$x = 25t; v = 12t; y = 39u; z = 20u \text{ erit}$$

$$a = 25; b = 12; c = 39; d = 20.$$

Porro fit

$$m = \frac{63}{18} \text{ et } n = \frac{44}{117}.$$

Hinc iam colligitur

$$x = 25.1121; v = 12.1121$$

$$y = 39(945 \pm 176); z = 20(945 \pm 176);$$

has

has ergo nanciscimur solutiones:

I. $x = 25.1121$; $v = 12.1121$; $y = 39.769$; $z = 20.769$

II. $x = 25$; $v = 12$; $y = 39$; $z = 20$.

Exemplum IV.

quo $p = 3$, $r = 4$, $q = 15$, $s = 8$.

§. 15. Fiet igitur

$\frac{xv}{zv} = \frac{5}{3}$ et $\frac{xz}{yz} = \frac{239}{240}$, ideoque

$\frac{xv}{zv} = \frac{17^2}{12^2}$ et $\frac{yz}{xz} = \frac{20^2}{17^2}$. Hinc sumto

$x = 17t$; $v = 12t$; $y = 20u$; $z = 17u$ erit

$a = 17$; $b = 12$; $c = 2$; $d = 17$.

Deinde fiet

$m = \frac{4}{3}$, et $n = \frac{161}{240}$, unde colligitur

$x = 17.111$; $v = 12.111$

$y = 20(272 \pm 161)$; $z = 17(272 \pm 161)$.

Hinc sequentes solutiones:

I. $x = 17.111$; $v = 12.111$; $y = 20.433$; $z = 17.433$

II. $x = 17$; $v = 12$; $y = 20$; $z = 17$

quae solutio posterior sine dubio omnium est simplicissima.

Exemplum V.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 9$, $s = 8$

§. 16. Hic erit

$\frac{xv}{zv} = \frac{29}{20}$ et $\frac{xz}{yz} = \frac{145}{144}$, hinc

$\frac{xv}{zv} = \frac{29^2}{20^2}$ et $\frac{yz}{xz} = \frac{6^2}{5^2}$.

M 3

Summa

Sumatur ergo

$a = 29$; $b = 24$; $c = 6$; $d = 5$; et cum fit

$m = \frac{11}{10}$ et $n = \frac{17}{144}$, valores quaesiti erunt

$x = 29.11$; $y = 6 (126 \pm 17)$

$v = 24.11$; $z = 5 (126 \pm 17)$.

Ambae ergo solutiones erunt

I. $x = 29.11$; $v = 24.11$; $y = 6.109$; $z = 5.109$

II. $x = 29$; $v = 24$; $y = 78$; $z = 65$

Alia Solutio eiusdem Problematis,
per Calculum angulorum deducta.

§. 17. Cum formula $xxyy - zzvv$ debeat esse quadratum, hoc eueniet, si sumatur $xy \sin. \alpha = vz$; tum enim erit $\sqrt{(xxyy - zzvv)} = xy \cos. \alpha$, quae ergo quantitas aequalis est huic formulae:

$$\frac{1}{2} (xx + yy - zz + vv).$$

Simili modo, posito

$$yv = xz \sin. \beta, \text{ fiet } \sqrt{(xxzz - yyvv)} = xz \cos. \beta \\ = \frac{1}{2} (xx + zz - yy + vv).$$

§. 18. Cum igitur fit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{1}{\sin. \alpha} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{1}{\sin. \beta}, \text{ productum dabit}$$

$$\frac{xx}{vv} = \frac{1}{\sin. \alpha \sin. \beta};$$

quamobrem statuamus $x = t$ et $v = t \sqrt{\sin. \alpha \sin. \beta}$. Prior vero per posteriorem diuisa dat $\frac{yy}{zz} = \frac{\sin. \beta}{\sin. \alpha}$; vnde statuamus $y = u \sqrt{\sin. \beta}$ et $z = u \sqrt{\sin. \alpha}$.

Substi-

Substituantur nunc hi valores in superiore radice extracta
sive in hac aequatione:

$$2xy \cos. \alpha = xx + yy - zz + vv,$$

oriaturque ista:

$$2tu \cos. \alpha \sqrt{\sin. \beta} = tt(1 + \sin. \alpha \sin. \beta) + uu(\sin. \beta - \sin. \alpha),$$

ex qua aequatione quadratica quaeratur u , fietque

$$u = \frac{t \cos. \alpha \sqrt{\sin. \beta} \pm t \cos. \beta \sqrt{\sin. \alpha}}{\sin. \beta - \sin. \alpha},$$

quamobrem sumi poterit

$$t = \sin. \beta - \sin. \alpha \text{ et } u = \cos. \alpha \sqrt{\sin. \beta} \pm \cos. \beta \sqrt{\sin. \alpha}.$$

§. 19. Substitutis igitur his valoribus loco t et u ,
quatuor quantitates quaesitae x, y, z, v ita determinabun-
tur, vt fit

$$x = \sin. \beta - \sin. \alpha; v = (\sin. \beta - \sin. \alpha) \sqrt{\sin. \alpha \sin. \beta}$$

$$y = \cos. \alpha \sin. \beta \pm \cos. \beta \sqrt{\sin. \alpha \sin. \beta}; z = \cos. \beta \sin. \alpha + \cos. \alpha \sqrt{\sin. \alpha \sin. \beta}.$$

Cum igitur hoc modo aequationi

$$2\sqrt{(xxyy - zzvv)} = xx + yy - zz + vv,$$

satisfiat, sumtis vtriusque quadratis ipsa aequatio biquadra-
dica proposita $\sqrt{}$ oritur, cui ergo etiam his valoribus sa-
tisfiet, consequenter etiam omnes septem formulae supra
allatae simul fient quadrata, etiamsi in hac Analyfi binas
tantum priores finis contemplati.

§. 20. Vt igitur valores pro x, y, z, v inuenti
fiant rationales, ante omnia finis et cosinus angulorum
 α et β debent esse rationales, id quod fiet, si sumamus

$$\sin. \alpha = \frac{2pr}{p^2 + rr} \text{ et } \sin. \beta = \frac{2qs}{q^2 + ss};$$

tum

tum enim erit

$$\cos. \alpha = \frac{pp - rr}{pp + rr} \text{ et } \cos. \beta = \frac{qq - ss}{qq + ss}.$$

Praeterea vero hic imprimis requiritur, ut productum sinuum, scilicet:

$$\sin. \alpha \sin. \beta = \frac{4prqs}{(pp + rr)(qq + ss)} = \square,$$

quae est ea ipsa conditio, quae in solutione praecedente postulabatur, ita ut ista solutio ab illa non aliter nisi modo investigationis discrepet. Hic vero fundamentum totius solutionis multo clarius perspicitur. Nunc igitur eam investigationem aggrediamur, quam supra sumus polliciti; quemadmodum, scilicet binae tales formulae indagari queant, quarum productum quadratum efficiat.

Quaestio.

Inuestigare binas huiusmodi formulas:

$$\frac{pp + rr}{2pr} \text{ et } \frac{qq + ss}{2qs},$$

quarum productum fiat quadratum.

Solutio.

§. 21. Cum igitur istud productum debeat fieri quadratum, per quadratum $4pprrqqss$ multiplicando etiam hoc productum quadratum reddi debet:

$$pr(pp + rr) \times qs(qq + ss);$$

vbi id commodum sumus adepti, ut prior factor tantum literas p et r , posterior vero solas q et s contineat, cui conditioni utique perfectissime satisfaceret, si utraque formula $pr(pp + rr)$ et $qs(qq + ss)$ seorsim quadratum effici posset. Verum iam dudum demonstratum est, hoc pro-

prorsus esse impossibile. Quia enim producti prioris factores p , r , $(pp + rr)$ sunt primi inter se, necesse foret, ut singuli essent quadrata. Posito ergo $p = tt$ et $r = uu$, tertius factor quadratus efficiendus foret $t^2 + u^2$. Demonstratum autem est, summam duorum biquadratorum quadratum reddi nunquam posse.

§. 22. Cum igitur ambae hae formulae:

$$pr(pp + rr) \text{ et } qs(qq + ss)$$

ipsae quadrata esse nequeant, necesse est, ut sint *numeri planisimiles*, uti ab *Euclide* vocantur. Quanquam autem ad hoc efficiendum quatuor habemus quantitates indeterminatas p , r , q , s , tamen nullo modo solutio generalis adhuc inuestigare potuit; quam ob causam tantum solutionibus particularibus contenti esse debemus, quae etiam maximas difficultates inuoluunt, nisi istas formulas in aliam speciem transmutemus, quod commodissime hoc modo fiet. Ponatur $p = 2fg$ et $r = ff - gg$; similique modo $q = 2bk$ et $s = bb - kk$, hocque modo ambae nostrae formulae euadent

$$2fg(ff - gg)(ff + gg)^2 \text{ et } 2bk(bb - kk)(bb + kk)^2.$$

Quia igitur postremi factores sponte sunt quadrata, superest, ut hoc productum:

$$2fg(ff - gg) \times 2bk(bb - kk)$$

reddatur quadratum, siue, quod eodem redit, hoc:

$$fg(ff - gg).bk(bb - kk),$$

et quia hic etiam quatuor literae insunt, ut eas ad pauciores numerum reducamus, statuamus $b = g$ et $k = f - g$; hoc modo posterior formula erit $fg(f - g)(2g - f)$, quae

per priorem multiplicata, omissis factoribus quadratis, prae-
bet hoc productum: $(f+g)(2g-f)$ quadratum efficien-
dum. Hunc in finem ponatur

$$f = \frac{2mm - nn}{s} \text{ et } g = \frac{mm + nn}{s}$$

sive, quia utriusque literae aequae multipla sumere licet,
sumamus

$$f = 2mm - nn \text{ et } g = mm + nn, \text{ unde fiet}$$

$$b = mm + nn \text{ et } k = mm - 2nn.$$

§. 23. Hinc ergo pro lubitu innumerabilia paria
binarum talium formularum:

$$fg(ff - gg) \text{ et } bk(bb - kk)$$

erui poterunt, quarum productum certe erit quadratum.
Veluti si sumamus $m = 2$ et $n = 1$, habebimus hos va-
lores:

$$f = 7; g = 5; b = 5; k = 2.$$

Hinc enim fit

$$fg(ff - gg) = 840 \text{ et } bk(bb - kk) = 210,$$

quarum productum est 4. 210².

§. 24. Verum hoc modo valores literarum $p, r,$
 q, s , mox prodirent satis enormes, quia posuimus

$$p = 2fg, r = ff - gg, q = 2bk \text{ et } s = bb - kk,$$

qui in exemplo allato fierent

$$p = 70; q = 20; r = 24; s = 21,$$

vbi bini p et r per 2 depressi euadent $p = 35$ et $r = 12$;
ita ut nostrum productum utique fit quadratum, scilicet:

$$3^2. 4^2. 5^2. 7^2. 29^2. 37^2.$$

Verum

Verum quia hi numeri ex casu simplicissimo, pro m et n sumto, sunt orti, facile intelligitur, ex maioribus valoribus, pro m et n ortis, pro literis p, r, q, s mox maximos numeros esse prodituros,

§. 25. Cum igitur pro nostro Problemate Solutiones potissimum simpliciores intendamus, istae formulae, ad quas sumus perducti, ad hunc scopum neutiquam sunt accommodatae; unde longe aliam viam inire conveniet, quae ita sit comparata, ut non ad numeros nimis magnos pro literis p, r, q, s , perducatur, et quae simul simplicissimas solutiones certissime exhibeat, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Cum $ab (aa + bb)$ sit forma utriusque formulae, qua indigemus, pro a et b successive accipiamus numeros simpliciores, et productum reuocemus ad hanc formam; $A^2 F$, ubi A^2 complectatur omnes factores quadratos, F vero sit productum ex factoribus non quadratis. Pro nostro igitur instituto eiusmodi duae pluresue formulae requiruntur, quae pro F eundem valorem praebeant, quandoquidem tales pro binis nostris formulis $pr(pp + rr)$ et $qs(qq + ss)$ accipere licebit. Hunc in finem sequentem tabulam adiungimus, quae pro singulis valoribus literarum a et b numeros littera F indicatos exhibeat, et quoniam consultum est in valoribus simplicioribus subsistere, hinc omittamus omnes numeros primos maiores quam 13.

a	b	F
2	1	2.5
3	1	2.3.5
3	2	2.3.13
4	3	3
5	1	2.5.13
7	1	2.7
7	4	5.7.13
8	1	2.5.13
9	7	2.5.7.13
11	2	2.5.11
11	3	2.3.5.11.13
12	5	3.5
13	9	2.5.13
15	8	2.3.5
18	1	2.13

§. 26. Hanc autem tabulam ulterius continuare licet, statuendo $a = 2fg$ et $b = ff - gg$; tum enim tantum formulam $2fg(ff - gg)$ examinare sufficiet. Hinc ergo similem tabulam pro numeris f et g subiungamus, adscriptis simul valoribus litterarum a et b , et ultima columna valores literae F indicabit:

f	g	a	b	F	f	g	a	b	F
2	1	4	3	3	8	1	16	63	7
3	2	12	5	3.5	8	3	48	55	3.5.11
4	1	8	15	2.3.5	8	5	80	39	3.5.13
4	3	24	7	2.3.7	8	7	112	15	3.5.7
5	2	20	21	3.5.7	9	2	36	77	7.11
5	4	40	9	2.5	9	4	72	65	2.5.13
6	1	12	35	3.5.7	10	1	20	99	5.11
6	5	60	11	3.5.11	10	3	60	91	3.5.7.13
7	2	28	45	5.7	11	2	44	117	11.13
7	4	56	33	2.3.7.11	11	4	88	105	2.3.5.7.11
7	6	84	13	3.7.13	11	10	220	21	3.5.7.11

§. 27. Iam ex his duabus tabulis coniunctis excerptamus eos casus, quibus eadem litera F convenit.

F	a	b	F	a	b
2.5	2	1		5	1
	40	9	2.5.13	8	1
	3	1		13	9
2.3.5	15	8		72	65
				21	20
			3.5.7	35	12
				112	15
				60	11
			3.5.11	55	48

§. 28. Ex his iam casibus plurimae Solutiones nostri Problematis, quo quaeruntur quatuor numeri x, y, z, v ,
N 3

z, v , quibus formula biquadratica, in Problemate proposita, signo V indicata, reuera ad nihilum redigitur, deduci possunt, quarum iam plures in exemplis allatis sunt datae, quas igitur hic conspectui coniunctim exponamus:

x	20	39	185	672	78	39.89	25.1121	20.433	6.109
y	17	25	148	112	65	25.89	12.1121	17.433	5.109
z	17	20	39	39	29	672	39.769	17.111	29.11
v	12	12	12	25	24	112	20.769	12.111	24.11

vbi, quia literae x, y, z , inter se permutari possunt, maximos valores ipsi x tribuimus, hincque descendentes pro y et z scripsimus. Semper autem minimus valor literae v competit.

Problema II.

Proposita formula biquadratica

$$V = x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv - 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv$$

inuestigare valores quatuor numerorum x, y, z, v . ut ista formula nihilo fiat aequalis. Quod Problema etiam ita enunciari potest: Quaerantur quatuor quadrata, xx, yy, zz, vv , quorum si ponatur summa $= \Sigma$, et summa factorum ex binis $= \Pi$, ut sit $\Sigma^2 = 4\Pi$.

§. 29. Quod si tales valores pro literis x, y, z, v fuerint inuenti, simul sequentes formulae reddentur quadrata, quorum radices ita se habebunt:

I. $2\sqrt{xxyy + zzvv} = xx + yy - zz - vv$

II. $2\sqrt{xxzz + yyvv} = xx + zz - yy - vv$

III.

$$\text{III. } 2V(xxvv + yyzz) = xx + vv - yy - zz$$

$$\text{IV. } 2V(xx yy + xx zz + yy zz) = xx + yy + zz - vv$$

$$\text{V. } 2V(xx yy + xx vv + yy vv) = xx + yy + vv - zz$$

$$\text{VI. } 2V(xx zz + xx vv + zz vv) = xx + zz + vv - yy$$

$$\text{VII. } 2V(yy zz + yy vv + zz vv) = yy + zz + vv - xx$$

quibus addi potest

$$\text{VIII. } 2V\Pi = xx + yy + zz + vv.$$

In hoc igitur Problemate quaterni numeri x, y, z, v , aequaliter ingrediuntur, cum in priore Problemate quadrati vv ratio fuisset diuersa.

Solutio huius Problematis.

§. 30. Solae priores formulae hic iterum sufficiunt ad totam solutionem absoluendam. Cum enim formula $xx yy + zz vv$ debeat reddi quadratum, hoc eueniet, sumendo

$$xy = zv \frac{(pp - rr)}{2pr};$$

tum enim erit

$$V(xx yy + zz vv) = \frac{zv(pp + rr)}{2pr},$$

ideoque

$$= \frac{1}{2}(xx + yy - zz - vv).$$

Simili modo pro secunda formula si sumatur

$$xz = \frac{2v(qq - ss)}{2qs} \text{ erit}$$

$$V(xx zz + yy vv) = \frac{yv(qq + ss)}{2qs} =$$

$$\frac{1}{2}(xx + zz - yy - vv).$$

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeamus has duas aequationes:

$$\frac{x y}{z v} = \frac{p p - r r}{2 p r} \text{ et } \frac{x z}{y v} = \frac{q q - s s}{2 q s}$$

earum productum dabit

$$\frac{x x}{v v} = \frac{(p p - r r)(q q - s s)}{4 p r q s};$$

prior vero per posteriorem diuisa dabit

$$\frac{y y}{z z} = \frac{q s (p p - r r)}{p r (q q - s s)},$$

atque nunc utrique conditioni satisfiet, dummodo fuerit

$$\frac{(p p - r r)(q q - s s)}{p r q s} = \square.$$

Quomodo igitur hoc effici debeat in sequentibus fusius docebimus. Interim vero, hic assumamus, tales valores pro literis p, q, r, s , nobis esse cognitos.

§. 32. Statuere igitur poterimus

$$\frac{x x}{v v} = \frac{a a}{b b} \text{ et } \frac{y y}{z z} = \frac{c c}{d d},$$

vbi ergo numeri a, b, c, d , vt cogniti spectantur. Quamobrem hinc ponamus $x = a t$, $v = b t$, $y = c u$, $z = d u$, sicque totum negotium nunc eo est reductum, vt ambo numeri t et u debite assignentur. Pro priore igitur radice quadrata $\frac{z v (p p + r r)}{2 p r}$ habebimus $z v = b d t u$; vnde si statuamus breu. gr. $\frac{b d (p p + r r)}{2 p r} = m$, similique modo pro altera radice (ob $y v = b c t u$) $\frac{b c (q q + s s)}{2 q s} = n$, ambo radices erunt $m t u$ et $n t u$.

§. 33. Pro priore igitur radice habebimus

$$2 m t u = x x + y y - z z - v v;$$

pro altera vero

$$2 n t u = x x + z z - y y - v v,$$

qua-

quarum summa dabit

$$(m+n)tu = xx - vv = (aa - bb)tt,$$

vnde statim deducitur $\frac{t}{u} = \frac{m+n}{a-a-b-b}$. Simili modo differentia dabit

$$(m-n)tu = yy - zz = (cc - dd)uu,$$

vnde etiam deducimus $\frac{t}{u} = \frac{cc-dd}{m-n}$, qui duo valores per ipsam quaestionis naturam inter se congruere debebunt.

At vero quia m et n per extractionem radicis sunt natae, eas tam negative quam positive accipere licebit, vnde simul gemini valores pro t et u reperientur, quibus inuentis tota Problematis Solutio ita se habebit:

$$x = a(m+n); v = b(m+n);$$

$$y = c(aa - bb); z = d(aa - bb);$$

vnde facile erit exempla quotcunque euoluere.

Exemplum 1.

quo sumitur $p = 5$, $r = 2$, $q = 6$ et $s = 1$.

§. 34. Hic igitur erit

$$\frac{x}{y} = \frac{21}{20} \text{ et } \frac{x}{z} = \frac{35}{12};$$

vnde oritur

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{4}, \text{ ideoque } a = 7 \text{ et } b = 4;$$

tum vero erit

$$\frac{y}{z} = \frac{5}{3}, \text{ ergo } c = 3 \text{ et } d = 5;$$

vnde fiet $m = 29$ et $n = 37$. Cum autem sit $m = \pm 29$, duplex solutio ita se habebit:

$$x = 7(37 \pm 29); v = 4(37 \pm 29); y = 99; z = 165.$$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. II.

O

Signa

Signa igitur superiora praebent hanc solutionem:

$$x = 14; v = 8; y = 3; z = 5;$$

inferiora vero

$$x = 56; v = 32; y = 99; z = 165.$$

Exemplum 2.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 8$, $s = 7$.

§. 35. Hic erit

$$\frac{x y}{z v} = \frac{21}{15} \text{ et } \frac{x z}{y v} = \frac{15}{112}.$$

unde oritur

$$\frac{x x}{v v} = \frac{3^2}{4^2} \text{ et } \frac{y y}{z z} = \frac{14^2}{5^2}.$$

Sumatur ergo $a = 3$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 5$, fietque $m = 58$ et $n = 113$. Verum ob $m = \pm 58$ duplex oritur solutio, scilicet:

$$x = 3(113 \pm 58); v = 8(113 \pm 58);$$

$$y = 14.55 \text{ et } z = 5.55.$$

Hinc hae duae solutiones:

$$x = 3; v = 8; y = 14; z = 5.$$

$$x = 3.171; v = 8.171; y = 14.55; z = 5.55.$$

Exemplum 3.

quo $p = 6$; $r = 1$; $q = 8$; $s = 7$.

§. 36. Hoc casu fit

$$\frac{x y}{z v} = \frac{35}{12} \text{ et } \frac{x z}{y v} = \frac{15}{112}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{x x}{v v} = \frac{5^2}{4^2} \text{ et } \frac{y y}{z z} = \frac{14^2}{3^2}.$$

Sum-

Sumto igitur

$$a = 5; b = 8; c = 14; d = 3 \text{ erit}$$

$$m = \pm 74 \text{ et } n = 113, \text{ hincque}$$

$$x = 5(113 \pm 74) \text{ et } v = 8(113 \pm 74);$$

vnde hae duae solutiones oriuntur:

$$x = 5; v = 8; y = 14; z = 3.$$

$$x = 5.187; v = 8.187; y = 14.39; z = 3.39.$$

Exemplum 4.

$$\text{quo } p = 6, r = 5; q = 8; s = 3.$$

§. 37. Cum hinc sit

$$\frac{x y}{z v} = \frac{11}{56} \text{ et } \frac{x z}{y v} = \frac{55}{28}, \text{ erit}$$

$$\frac{x z}{v v} = \frac{11^2}{24^2} \text{ et } \frac{y y}{z z} = \frac{2^2}{5^2}, \text{ ideoque}$$

$$a = 11; b = 24; c = 2; d = 5;$$

hinc ob $m = 122$ et $n = 73$, erit

$$x = 11(122 \pm 73) \text{ et } v = 24(122 \pm 73);$$

vnde sequentes deducuntur solutiones:

$$x = 11.49; v = 24.49; y = 2.455; z = 5.455;$$

$$x = 33; v = 72; y = 14; z = 35.$$

§. 38. Si quis plura huiusmodi exempla euoluere voluerit, quoniam totum negotium eo redit, vt pro p, r, q, s , idonei valores exhiberi queant, ad hoc efficiendum sequentem regulam adiungamus.

Regula, pro inueniendis numeris idoneis,
pro p, r, q, s .

§. 39. Si f et g denotent numeros quoscunque
sive positiuos sive negatiuos, semper accipi poterit

$$p = fg \text{ et } r = (2g + f)(3g + 2f);$$

tum vero sumi poterunt duplici modo pro q et s valores
debiti, scilicet:

$$q = (2g + f)(3g + f) \text{ et } s = f(f + g), \text{ vel}$$

$$q = (f + g)(3g + 2f) \text{ et } s = g(3g + f);$$

vbi notandum, si bini tales numeri habeant factorem co-
munem, eum omitri posse; ac si eueniat, vt tales numeri
prodeant negatiui, eorum loco semper positiuos scribere
licebit. Ita si pro f et g vnitas accipiatur, erit $p = 1$ et
 $r = 15$; tum vero habebitur vel

$$q = 6 \text{ et } s = 1, \text{ vel } q = 5 \text{ et } s = 2,$$

vbi insuper notasse iuuabit, loco binorum talium numero-
rum etiam eorum semi-summam et semi-differentiam accipi
posse. Ita loco $p = 1$ et $r = 15$ sumi poterit $p = 8$ et
 $r = 7$, quem casum in exemplis ante allatis expediuimus.

Solutio ex calculo angulorum petita.

§. 40. Pro hoc igitur Problemate statuamus

$$\frac{x y}{z v} = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}; \text{ tum enim erit}$$

$$V(xy + zz + vv) = \frac{z v}{\sin. \alpha} = \frac{1}{2}(xx + yy - zz - vv).$$

Tum vero statuatur

$$\frac{x z}{y v} = \frac{\cos. \beta}{\sin. \beta}, \text{ ac tum habebitur}$$

$$V(xz + yy + vv) = \frac{y v}{\sin. \beta} = \frac{1}{2}(xx + zz - yy - vv).$$

§. 41.

§. 41. Iam his duabus formulis combinandis habebimus primo

$$\frac{x}{v} = \frac{\cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. \alpha \sin. \beta} = \cot. \alpha \cot. \beta,$$

vnde ponatur $x = t \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}$ et $v = t$. Simili modo habebitur

$$\frac{y}{z} = \frac{\cot. \alpha}{\cot. \beta}, \text{ vnde ponatur}$$

$$y = u \sqrt{\cot. \alpha} \text{ et } z = u \sqrt{\cot. \beta}.$$

Substituatur hi valores in priore aequatione radicali, fietque

$$\frac{t u \sqrt{\cot. \beta}}{\sin. \alpha} = t t (\cot. \alpha \cot. \beta - 1) + u u (\cot. \alpha - \cot. \beta),$$

vnde colligitur

$$\frac{u}{t} = \frac{\sqrt{\cot. \beta}}{\sin. \alpha} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha}}{\sin. \beta}.$$

Statuatur ergo

$$u = \frac{\sqrt{\cot. \beta}}{\sin. \alpha} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha}}{\sin. \beta} \text{ et } t = \cot. \alpha - \cot. \beta,$$

et quatuor valores quaesiti erunt

$$x = \cot. \alpha \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta} - \cot. \beta \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta},$$

$$v = \cot. \alpha - \cot. \beta; y = \frac{\cot. \alpha}{\sin. \beta} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}}{\sin. \alpha}$$

$$z = \frac{\cot. \beta}{\sin. \alpha} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}}{\sin. \beta}.$$

§. 42. Vt igitur isti valores fiant rationales, ante omnia necesse est, vt tam sinus quam cosinus angulorum α et β , tum vero etiam, vt $\sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}$, fiant rationales. Priori satisfit, ponendo

$$\sin. \alpha = \frac{2pr}{pp+rr} \text{ et } \sin. \beta = \frac{2qs}{qq+ss},$$

tum enim fiet

$$\cos. \alpha = \frac{pp-rr}{pp+rr} \text{ et } \cos. \beta = \frac{qq-ss}{qq+ss}$$

O 3

ideo

ideoque

$$\cot. \alpha = \frac{p p - r r}{2 p r} \text{ et } \cot. \beta = \frac{q q - s s}{2 q s}.$$

Quamobrem requiritur, vt productum $\frac{(p p - r r)(q q - s s)}{p r q s}$ fiat quadratum, sicque deducimur ad ipsam solutionem ante inuentam, et quia hoc modo ipsa aequatio biquadratica adimpletur, simul omnes septem formulae supra memoratae euadent quadrata.

§. 43. Colligamus iam casus in exemplis superioribus euolutos, atque simul plures casus habebimus, quibus huic aequationi biquadratae satisfat, scilicet:

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2 x x y y - 2 x x z z - 2 x x v v - 2 y y z z - 2 y y v v = 2 z z v v = 0,$$

et quia literae x, y, z, v , inter se permutari patiuntur, valores supra inuentos secundum ordinem magnitudinis disponamus,

$x = 14$	72	165	8, 171	8, 187	5, 455
$y = 8$	35	99	14, 55	5, 187	24, 49
$z = 5$	33	56	3, 171	14, 39	2, 455
$v = 3$	14	32	5, 55	3, 39	11, 49